Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

Gliwice 2006

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

za pomocą szeregów

- Metoda współczynników nieoznaczonych
- Metoda kolejnego różniczkowania (metoda jednego punktu)
- Metoda kolejnych przybliżeń Picarda

metody dyskretne

- Metoda łamanych Eulera
- Ulepszenia metody Eulera
- Wzory Rungego - Kutty
- Metody wielokrokowe

Dyskretne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

Gliwice 2006

Rozpatrujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego wraz z warunkiem początkowym

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Zakładamy, że:

- Funkcja $F(x,y)$ jest ciągła i ograniczona w pewnym obszarze płaskim Ω.

- Funkcja $F(x,y)$ spełnia w tym obszarze warunek Lipschitza względem zmiennej y, tzn. że istnieje taka liczba K, że dla wszystkich par punktów

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2)$$

należących do obszaru Ω spełniona jest nierówność:

$$\left| F(x, y_1) - F(x, y_2) \right| < K(y_1 - y_2)$$

Metoda Eulera (metoda łamanych)

Gliwice 2006

Polega na przybliżonym rozwiązaniu równania:

$$y\left(x_{i+1}\right) = y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F\left[x, y(x)\right] \mathrm{d}\, x$$

Funkcję $F(x, y)$ traktujemy na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ jako stałą i równą wartości F w punkcie (x_i, y_i):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F\left[x, y(x)\right] \mathrm{d}\, x = h_i\, F\left(x_i\, , \, y_i\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór rekurencyjny w postaci:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h_i\,F(x_i, y_i), \quad y(x_0) = y_0}$$

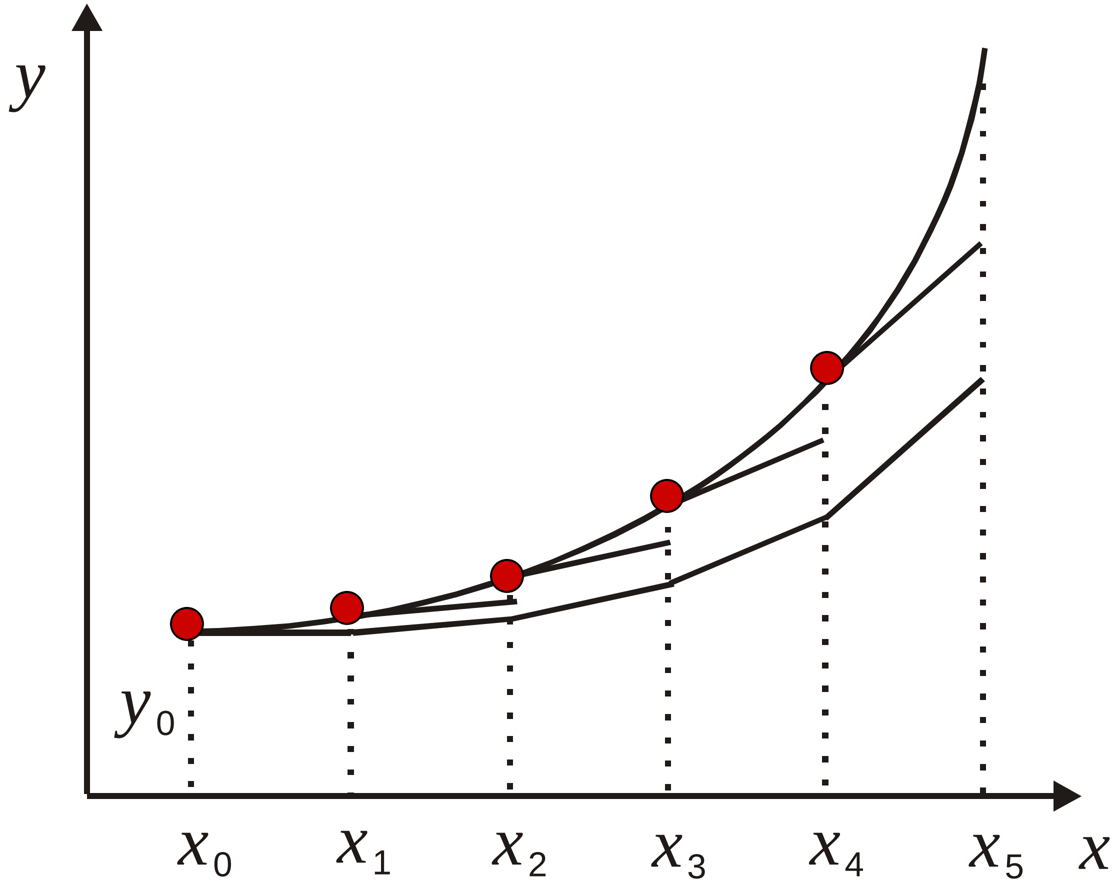
dla $i = 0, 1, \ldots, n$

Pochodna y' została zastąpiona ilorazem różnicowym

$$\frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i}$$

czyli krzywą całkową na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ aproksymuje się odcinkiem stycznej do niej przechodzącej przez punkt (x_i, y_i).
Zwykle przyjmuje się, że

$$h_i = const = h$$



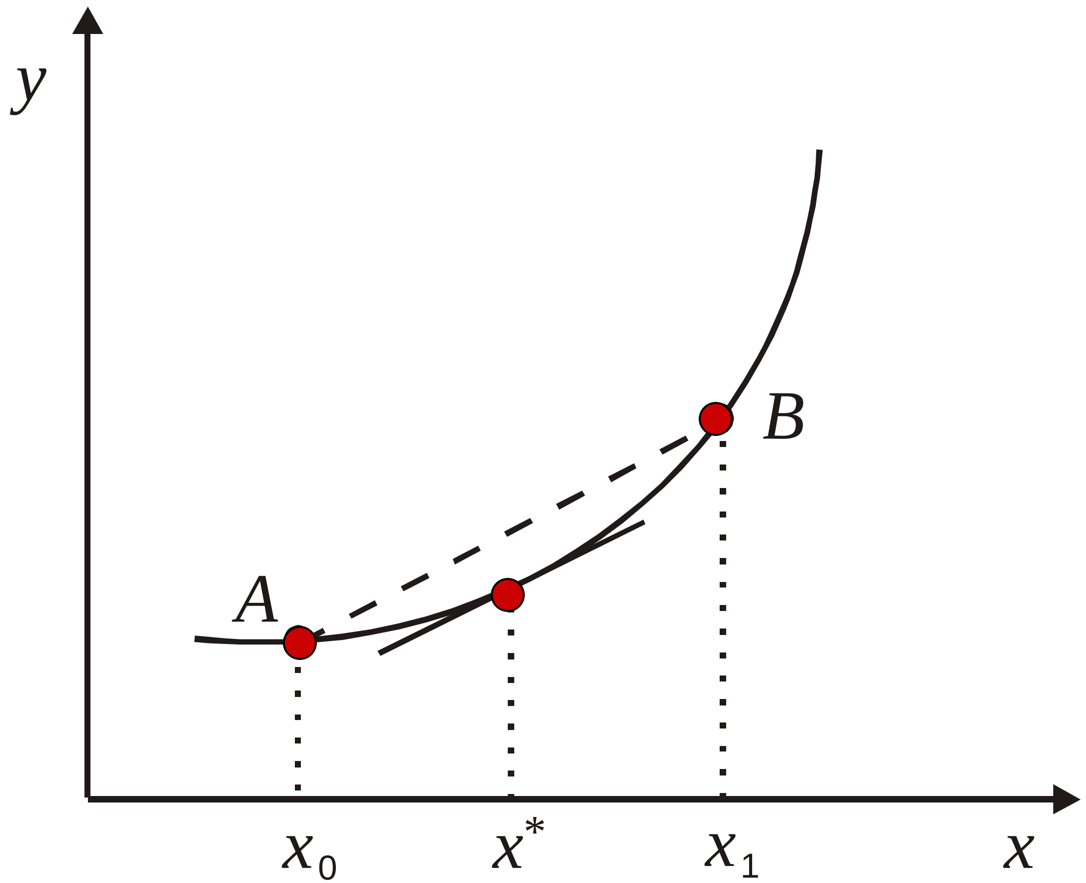
Interpretacja geometryczna metody łamanych Eulera

Ulepszenia metody łamanych

(pierwsze ulepszenie)

Pierwsze ulepszenie metody łamanych polega na przyjęciu następującego założenia:

Styczna do łuku $A\,(x_i,\ y_i),\ B\,(x_{i+1},\ y_{i+1})$ w punkcie o odciętej $x^* = (x_i + x_{i+1})/2$ jest równoległa do cięciwy AB .



Interpretacja geometryczna pierwszego ulepszenia metody łamanych Eulera

Dla rozpatrywanego przypadku stosujemy następujące wzory:

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right)$$

$$y^* = y_i + \frac{1}{2} h F\left(x_i, y_i\right)$$

$$m^* = F\left(x^*, y^*\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, m^*$$

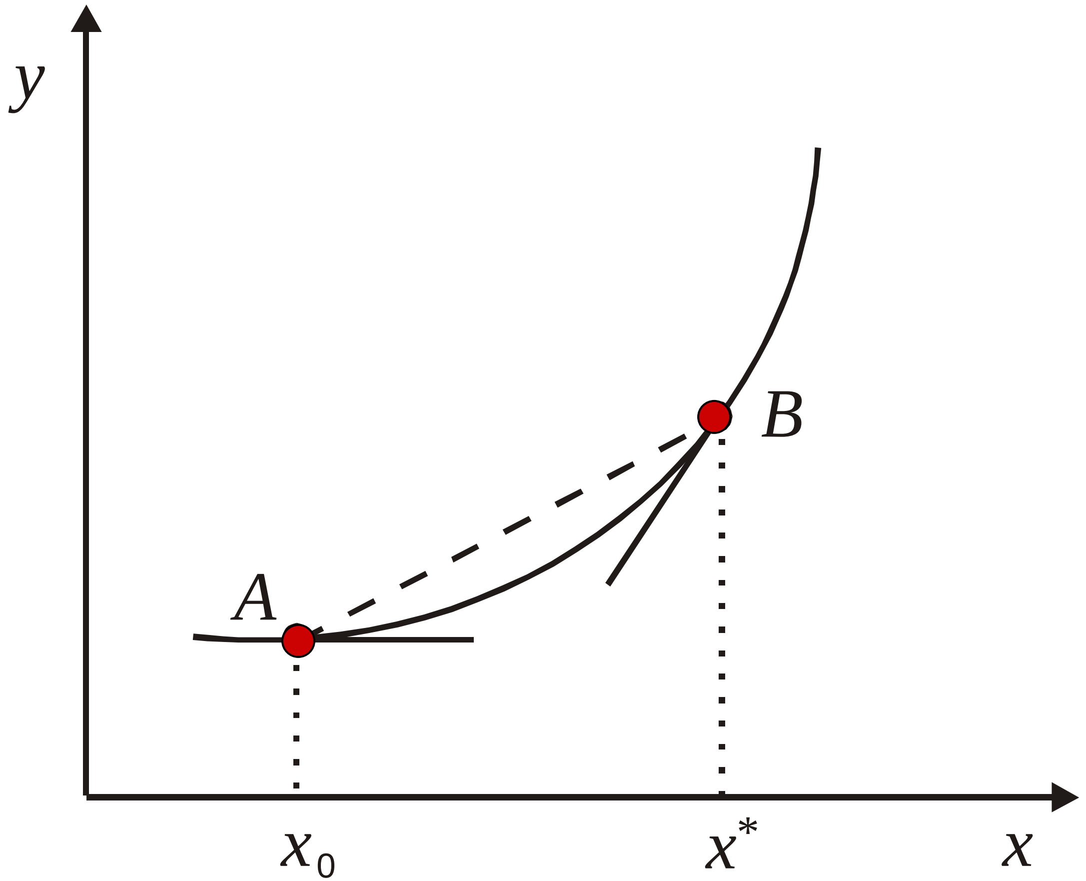
Ulepszenia metody łamanych

(drugie ulepszenie)

Drugie ulepszenie metody łamanych polega na przyjęciu następującego założenia:

Współczynnik kierunkowy siecznej AB jest średnią arytmetyczną współczynników kierunkowych stycznych w punktach A i B.

Metoda ta nazywana jest też metodą Eulera – Cauchy'ego.



Interpretacja geometryczna drugiego ulepszenia metody łamanych Eulera

Dla rozpatrywanego przypadku stosujemy następujące wzory:

$$x^* = x_{i+1} = x_i + h$$

$$y^* = y_i + h\,F(x_i, y_i)$$

$$m^* = F\left(x^*, y^*\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\left[F(x_i, y_i) + m^*\right]$$

PRZYKŁAD:

Za pomocą metody Eulera oraz jej ulepszeń rozwiązać równanie

$$y' = x + y$$

z warunkiem początkowym $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$, przyjmując $h = 0.1$

Rozwiązanie dla prostej metody Eulera:

Korzystamy ze wzoru rekurencyjnego:

$$y_{i+1} = y_i + h_i\, F(x_i, y_i), \quad y(x_0) = y_0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

z którego wynika:

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (x_i + y_i), \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

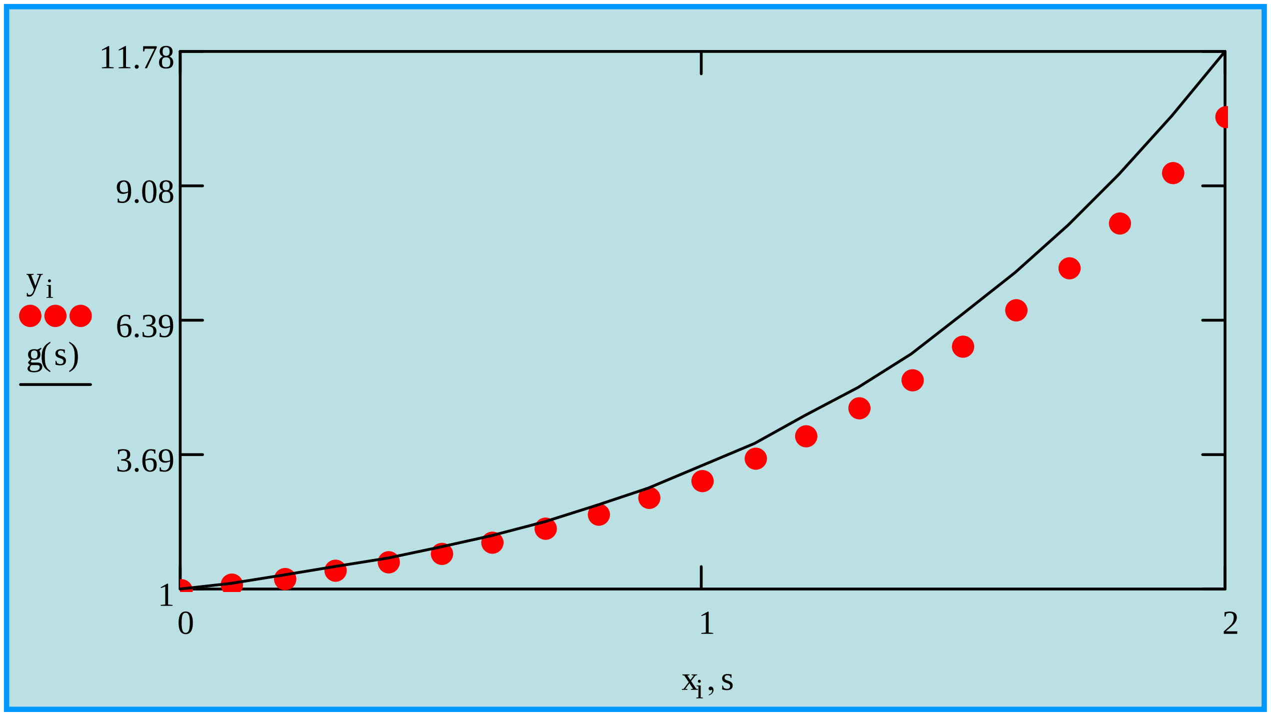
Obliczamy:

$$x_1 = x_0 + h = 0.1 \qquad y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1.1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2 \qquad y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.22$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.3 \qquad y_3 = y_2 + h(x_2 + y_2) = 1.362$$

itd.



x =	y =
0	1
0.1	1.1
0.2	1.22
0.3	1.362
0.4	1.528
0.5	1.721
0.6	1.943
0.7	2.197
0.8	2.487
0.9	2.816
1	3.187
1.1	3.606
1.2	4.077
1.3	4.605
1.4	5.195
1.5	5.854

Rozwiązanie dla pierwszego ulepszenia metody Eulera:

Dla warunku początkowego: $x_0 = 0, \; y_0 = 1$

obliczamy

pierwszy krok

$$x_1 = 0.1$$

$$x^* = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = 0.05 \qquad y^* = y_0 + \frac{1}{2} h (x_0 + y_0) = 1.05$$

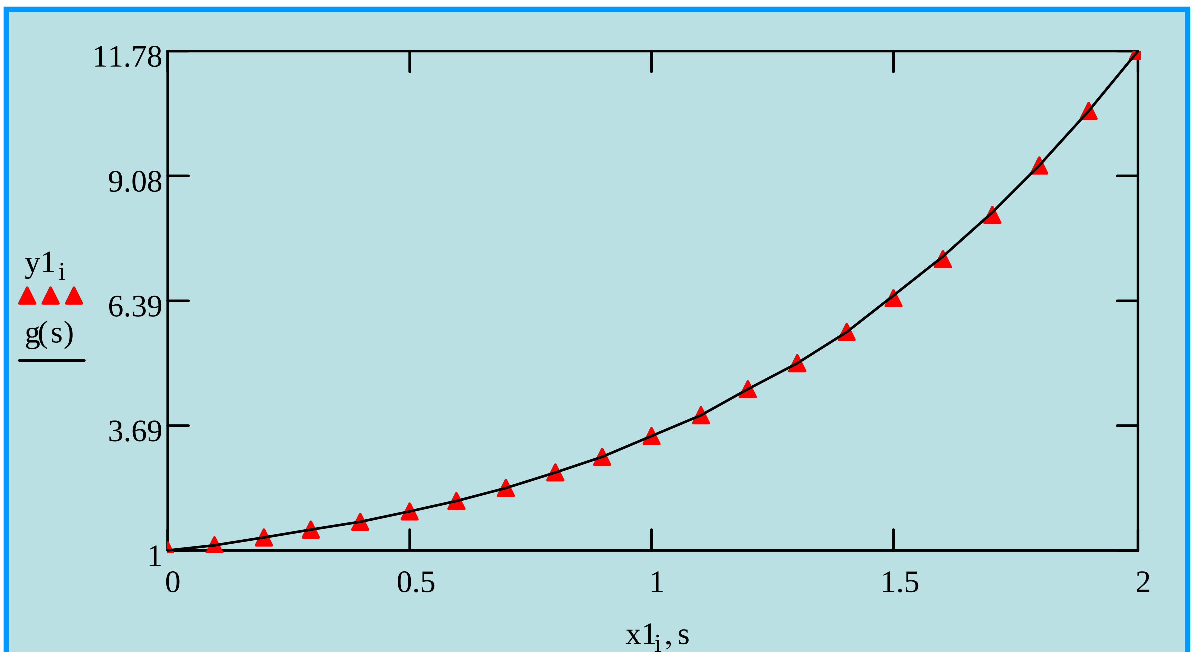
$$m^* = x^* + y^* = 1.1 \qquad y_1 = y_0 + h\, m^* = 1.11$$

drugi krok

$$x_2 = 0.2$$

$$x^* = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0.15 \qquad y^* = y_1 + \frac{1}{2}h(x_1 + y_1) = 1.1705$$

$$m^* = x^* + y^* = 1.3205 \qquad y_2 = y_1 + h\,m^* = 1.24205$$ itd.



x =	y1 =
0	1
0.1	1.11
0.2	1.242
0.3	1.398
0.4	1.582
0.5	1.795
0.6	2.041
0.7	2.323
0.8	2.646
0.9	3.012
1	3.428
1.1	3.898
1.2	4.428
1.3	5.024
1.4	5.693
1.5	6.443

Rozwiązanie dla drugiego ulepszenia metody Eulera:

Dla warunku początkowego: $x_0 = 0, \;\; y_0 = 1$

obliczamy

pierwszy krok

$$x^* = x_1 = x_0 + h = 0.1 \qquad y^* = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1.1$$

$$m^* = x^* + y^* = 1.2 \qquad y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h(x_0 + y_0 + m^*) = 1.11$$

drugi krok

$$x^* = x_2 = x_1 + h = 0.2 \qquad y^* = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.231$$

$$m^* = x^* + y^* = 1.431 \qquad y_2 = y_1 + \frac{1}{2}h(x_1 + y_1 + m^*) = 1.24205$$

itd.

Wnioski:

- Metoda łamanych (Eulera) jest najprostszą metodą z grupy algorytmów dyskretnych.
- Zmniejszenie kroku h istotnie polepsza dokładność metody łamanych, przy czym należy pamiętać, że nadmierne zmniejszenie kroku daje efekt odwrotny do spodziewanego. Niestety literatura nie podaje reguł doboru optymalnego kroku całkowania - najczęściej stosuje się „metodę prób".
- Korzystanie z ulepszeń metody łamanych daje wyniki nieporównywalnie lepsze.

KONIEC